Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Ciências Integradas do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

Frações Contínuas e Aplicações

por

Larini Rosa Inácio †

Licenciatura em Matemática - Ituiutaba - MG

Orientador: Prof. Msc. Germano Abud de Rezende

Frações Contínuas
e Aplicações

Este exemplar corresponde à redação final da Monografia devidamente corrigida e defendida por **Larini Rosa Inácio** e aprovada pela comissão julgadora.

Ituiutaba, xx de xxxxxx de 2010.

Prof. Msc. Germano Abud de Rezende

Banca examinadora:

Prof. Msc. Germano Abud de Rezende.

Prof. Msc. Edward Luis de Araújo.

Prof. Msc. Daniel Cariello

Monografia apresentada a Faculdade de Ciências Integradas do Pontal, UFU como requisito parcial para obtenção do título de **Licenciada em Matemática**.

Ao meu Orientador
Germano

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao blababla lbalbalbl balblalbla bablalbalblal balblalbla adfbauddlfadfkj abdfjabdjfkbakd a fbdjfabjds a.kdsbfa df akdbfkjad asdbfjahdsf ajdbfkjabjfdbds absdjfbjads adbfjda dfhanf akdfjansfjads ajdbfjadf

RESUMO

Neste trabalho, fazemos um estudo das frações contínuas simples, que são expressões do tipo

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

onde a_0 é um número inteiro e $a_1, a_2, a_3, ...$ são números inteiros positivos. Um resultado importante é que qualquer número real pode ser escrito como uma fração contínua e, se o número for racional a expansão é finita, isto é, $a_k = 0$ para k suficientemente grande. Frações contínuas fornecem as "melhores" aproximações racionais para números irracionais. As frações contínuas infinitas representam números irracionais, neste caso a representação pode ser periódica ou não. A teoria tem várias aplicações na análise, na teoria da probabilidade, na teoria de números e também nas ciências aplicadas. Desenvolvemos um estudo das propriedades das frações contínuas, alguns resultados importantes e algumas aplicações, destacando a equação de Pell, e as equações diferenciais ordinárias de 2^a ordem.

CONTEÚDO

Agradecimentos i
Resumo ii

Introdução **1**
Objetivo 1
Estrutura dos Tópicos Apresentados 1

1 Frações Contínuas Finitas **2**
1.1 Convergentes 5
1.2 Aproximações Sucessivas 8

2 Frações Contínuas Infinitas **11**

3 Aplicações **15**
3.1 A Equação de Pell 15
3.2 Equações Diferenciais de 2^a Ordem 16
Bibliografia 17

Introdução

Frações contínuas é um tópico de extrema importância em Matemática tendo aplicações nas suas diversas áreas e em outras áreas do conhecimento. Entretanto a teoria é pouco difundida e as frações contínuas raramente aparecem nas grades curriculares.

Objetivo

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo mais detalhado da Teoria das Frações Contìnuas e divulgar os resultados estudados, apresentando várias aplicações nos vários ramos da Matemática e outras áreas do conhecimento.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 1,
- No capítulo 2,
- No capítulo 3

CAPÍTULO 1

Frações Contínuas Finitas

Define-se uma fração contínua finita simples da seguinte forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

onde a_0 é um inteiro e $a_1, \ldots, a_n$ inteiros estritamente positivos. Eles são denominados denominadores parciais ou quocientes parciais. Iniciemos com um exemplo.

Exemplo 1.1. *Vamos encontrar o máximo divisor comum de* 81 *e* 82 *pelo processo das divisões sucessivas.*

$$\begin{aligned} 81 &= 2 \times 32 + 17 \\ 32 &= 1 \times 17 + 15 \\ 17 &= 1 \times 15 + 2 \\ 15 &= 7 \times 2 + 1 \\ 2 &= 2 \times 1 + 0 \end{aligned}$$

Portanto, $(81, 32) = 1$*, onde* 1 *é o último resto não nulo na sequência de divisões sucessivas. Como consequência destas igualdades, podemos reescrever as equações acima adequadamente:*

$$\begin{gathered}
\tfrac{81}{32} = \tfrac{2\times 32}{32} + \tfrac{17}{32} = 2 + \tfrac{17}{32} \\
\tfrac{32}{17} = \tfrac{1\times}{17} + \tfrac{15}{17} = 1 + \tfrac{15}{17} \\
\tfrac{17}{15} = \tfrac{1\times 15}{15} + \tfrac{2}{15} = 1 + \tfrac{2}{15} \\
\tfrac{15}{2} = \tfrac{7\times 2}{2} + \tfrac{1}{2} = 7 + \tfrac{1}{2} \\
\tfrac{2}{2} = \tfrac{2\times 1}{2} + 0 = 1 + 0
\end{gathered}$$

Assim substituindo as equações necessárias teremos:

$$\frac{81}{32} = 2 + \frac{17}{32} = 2 + \frac{1}{\frac{32}{17}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{15}{17}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{17}{15}}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{15}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{15}{2}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{2}}}}$$

Dizemos que esta última expressão é a fração contínua simples que representa o número racional $\frac{81}{32}$*. A notação usada para simplificar tal expressão é* $[2, 1, 1, 7, 2]$*, onde cada número corresponde aos quocientes parciais da fração.*

Após tal exemplo, um fato que podemos questionar é se existe uma fração contínua finita simples para todo número racional. A resposta para tal questionamento, é sim. Vejamos o teorema a seguir:

Teorema 1.2. *Todo número racional pode ser escrito como uma fração contínua finita simples.*

Demonstração. Seja $\frac{a}{b}(b > 0)$ um racional qualquer. Aplicando o Algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum entre a e b, teremos:

$$\begin{gathered}
a = a_0 b + r_1, 0 < r_1 < b \\
b = r_1.a_1 + r_2, 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 = r_2.a_2 + r_3, 0 < r_3 < r_2 \\
\ddots \\
r_{n-2} = r_{n-1}.a_{n-1} + r_n, 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} = r_n.a_n + 0
\end{gathered}$$

Onde todo resto r_k é um inteiro positivo e $a_1, \ldots, a_n$ todos positivos. Reescrevendo as equações do algoritmo acima adequadamente, obtemos:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r_1}{b} = a_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$$
$$\frac{b}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$$
$$\frac{r_1}{r_2} = a_2 + \frac{r_3}{r_2} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$$
$$\ddots$$
$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = a_n$$

Fazendo as substituições necessárias, sucessivamente, a partir da primeira equação, temos:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}}$$

$\square$

Observação 1.3. *Notemos que:*

1. *Os denominadores parciais das frações contínuas são exatamente os mesmo quocientes obitidos nas divisões sucessivas dos Algoritmo de Euclides.*

2. *A representação de um número racinal como uma fração contínua finita simples não é unica. Se $a_n > 1$, podemos modificar o último termo da seguiente forma:*

$$a_n = (a_{n-1}) + 1 = (a_{n-1}) + \frac{1}{1}$$

Por exemplo,

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{2}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}$$

3. *Quando $a > 0$e $b > 0$, sendo $|a| > |b|$, todos os a_i's serão inteiros positivos.*

4. *Quando $a < 0$e $b > 0$, sendo $|a| < |b|$, o denominador parcial a_0 será um interio negativo, e os demis são inteiros positivos*

5. *Quando $|a| < |b|$, temos na representação da fração contínua, o primeiro denominador parcial será 0. Então a respresentação é dada por $[0, a_1, \ldots .a_n]$.*

Exemplo 1.4. *Vamos escrever o quociente entre dois números de Fibonacci consecutivos (f_{n+1}, f_n).*

Observação: A sequência de Fibonacci é definida pela fórmula de recorrência:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, n \geq 1$$
$$f_0 = f_1 = 1$$

Assim teremos que $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$ *são termos desta sequência.*
Solução: *Aplicando o Algoritmo de Euclides à* f_{n+1} *e* f_n *teremos* $n-1$ *equações que se seguem:*

$$\begin{gathered} f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \\ f_n = 1.f_{n-1} + f_{n-2} \\ \vdots \\ f_4 = 1.f_3 + f_2 \\ f_3 = 2.f_2 + 0 = f - 1 + f - 2, \textit{ pois } f_1 = f_2 \end{gathered}$$

Assim a representação do quociente entre dois números de Fibonacci consecutivos é dada por:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = [1, 1, 1, \ldots, 1, 2] = [1, 1, 1, \ldots, 1, 1, 1]$$

, onde o inteiro 1 *aparece* n *vezes e n+1 vezes respectivamente. Então a fração contínua* $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ *é fácil de ser descrita, pois tem* n *denominadores parciais iguais a* 1*.*

1.1 Convergentes

Como demostramos anteriormente, qualquer número racional pode ser escrito sob a forma de uma fração contínua simples.

$\frac{c}{q} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ onde a_1 é um inteiro e $a_2, \ldots, a_n$ são interios positivos. Consideremos as frações:

$$c_1 = \frac{a_1}{1}, c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2}, c_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}, \ldots$$

obtidas pela expansão das frações contínuas: $[a_1], [a_1, a_2], [a_1, a_2, a_3]$.

CAPÍTULO 2

Frações Contínuas Infinitas

Até agora obtivemos a representação de números racionais somente através das frações contínuas finitas. Porém, uma das utilidades da teoria de frações contínuas finitas é achar valores aproximados de números irracionais. Para apresentarmos tais aproximações é necessário apresentarmos algumas noções sobre frações contínuas infinitas: Se $a_o, a_1, \ldots\ldots$ é uma sequência infinta de inteiros, todos positivos, com exceção do a_o que pode ser um inteiro positivo ou negativo, então temos que a expressão:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}$$

mais simplismente denotada por $[a_0, a_1, \ldots]$ é chamada de fração infinita contínua simples. Observe que o convergente $C_n = [a_n, a_1, \ldots\ldots, a_n]$, com $n \geq 0$, é definido para cada fração contínua finita. Parece razoável então definir o valor da fração contínua infinita $[a_0, a_1, \ldots]$, sendo o limite da sucessão de núemros racionais C_n, com n tendendo ao infinito, se este limite existir. Este limite não só existe, mas é sempre um número irracional. Vendo isto, notamos que as fórmulas obtidas para frações continuas finitas são válidas para frações contínuas infinitas.Uma das relações válidas é a cadeia infinita de desigualdades dos convergentes.

$$C_0 < C_2 < C_4 < \ldots\ldots < C_{2n} < \ldots\ldots < C_{2n+1} < \ldots\ldots < C_5 < C_3 < C_1$$

Os convergentes pares formam uma sequência crescente, com valores menores que o segunto convergente C_1. O limite α de cada convergente par será maior que o próprio convergente. Já os convergentes ímpares formam uma sequência decrescente, com valores maiores que o primeiro convergente C_0. O limete α' de cada convergente ímpar será menor que o próprio.

CAPÍTULO 3

Aplicações

3.1 A Equação de Pell

Nesta seção, estudaremos os tipos de bifurcações órbitas periódicas simétricas próximas da origem para o sistema reversível em ressonância não semi-simples $1:1:1$. Consideramos A como um bloco de Jordan de dimensão 3, visto que, caso contrário, ele será de codimensão maior do que 2. Em coordenadas complexas, considere $V = \{z|\ z = (z_1, z_2, z_3)\}$,

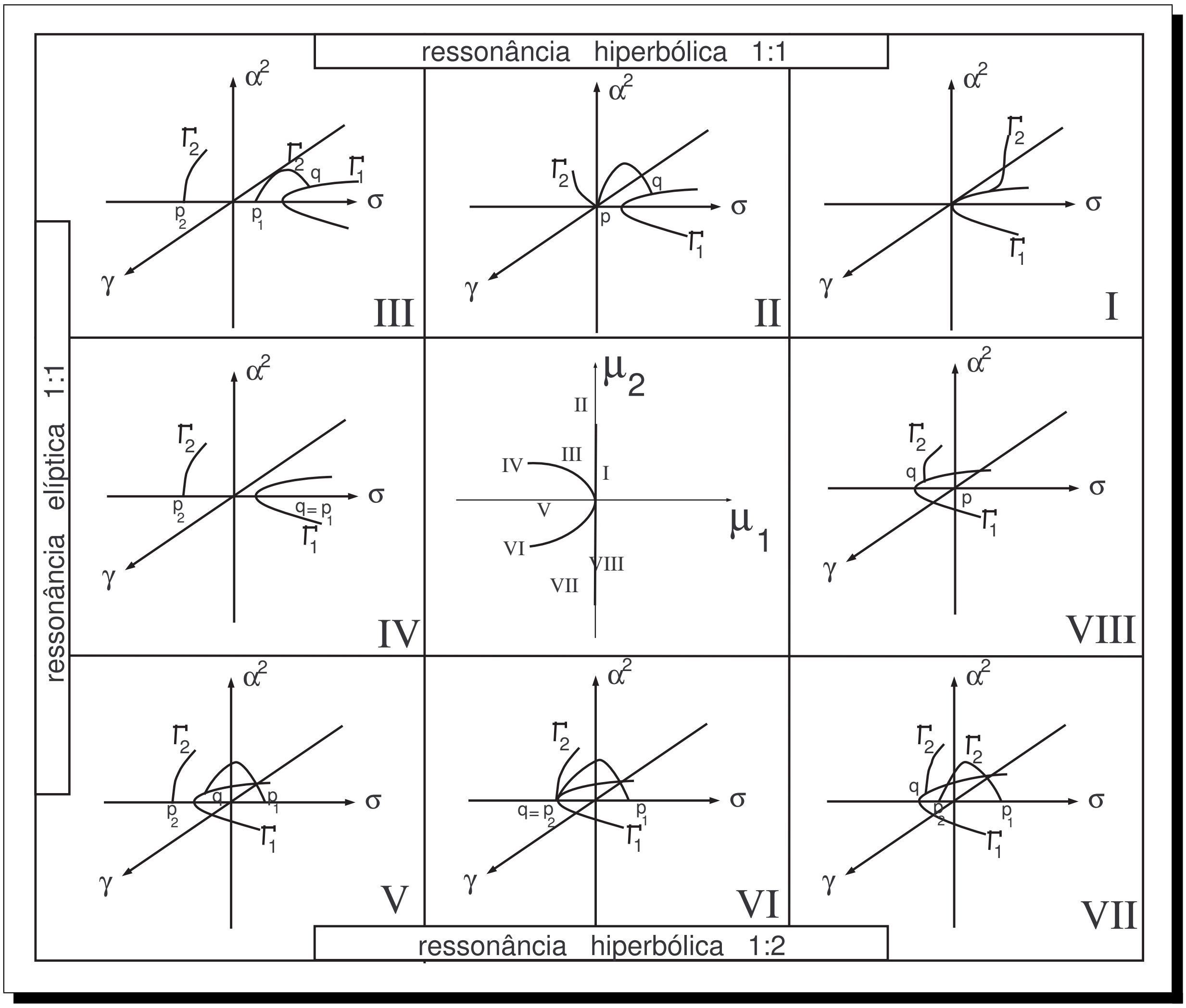

Figura 3.1: Ressonância não Semi-simples 1:1:2, $a_1, b_1, c_1, c_4 > 0$.

3.2 Equações Diferenciais de 2^a Ordem

BIBLIOGRAFIA

[1] Arnold, V.I., *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations.* Springer, Second Edition, 1988.

[2] Arnold, V.I. and Sevryuk, M.B., *Oscillations and Bifurcations in Reversible Systems.* Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics - ed. Sagdeev, R.D.(Mir,Moscou),pp.31-64, 1986.

[3] Arrowsmith, D.K. and Place, C.M., *An Introduction to Dynamical Systems.* Cambridge University Press, 1990.

[4] Belitskii,G., *C^∞-normal Forms of Local Vector Fields.* preprint, 2001.

[5] Brézis, H., *Análisis Funcional: Teoría e Aplicaciones.* Alianza Editorial, S.A., 1984.

[6] Chow, Shui-Nee and Li, Chengzhi and Wang, Duo, *Normal Forms and Bifurcations of Planar Vector Fields.* Cambridge University Press, 1994.

[7] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* Springer, 1990.